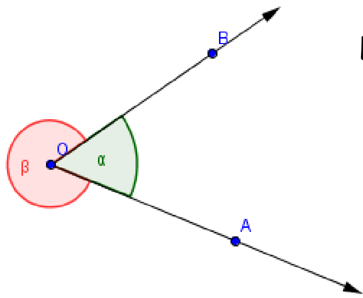
Ángulos y Polígonos:

- Definición:



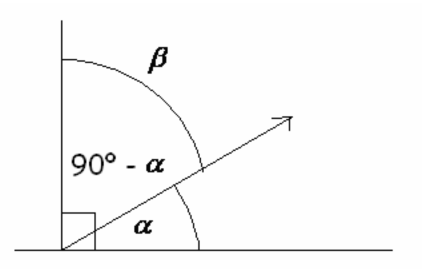
Los ángulos se leen en sentido anti-horario:

$$\angle AOB = \alpha$$
$$\angle BOA = \beta$$

SISTEMAS DE MEDICIÓN		
Sistema Centesimal (gradianes)	Sistema Sexagesimal (grados)	Sistema Circular (radianes)
400^g	$360°$	2π
300^g	$270°$	$\frac{3\pi}{2}$
200^g	$180°$	π
100^g	$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$66,66...^g$	$60°$	$\frac{\pi}{3}$
50^g	$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$33,33...^g$	$30°$	$\frac{\pi}{6}$

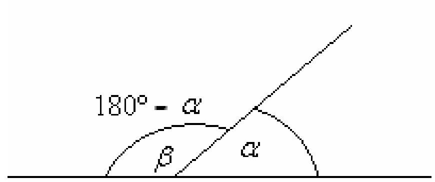
- Ángulos Complementarios:

$\alpha + \beta = 90°$



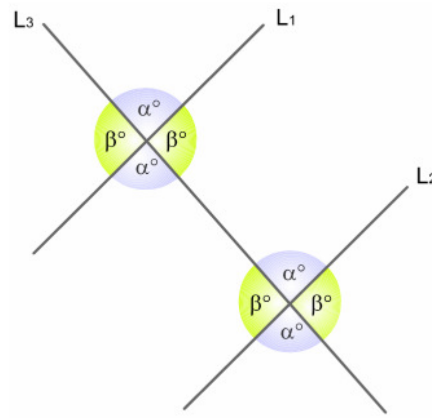
- Ángulos Suplementarios:

$\alpha + \beta = 180°$



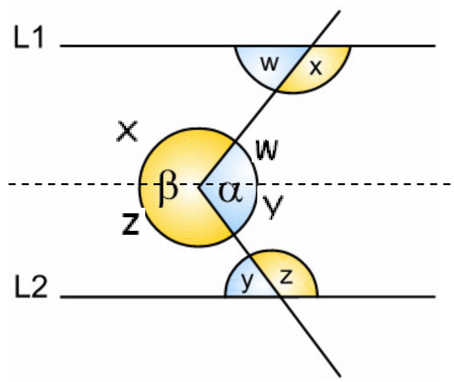
- Ángulos entre paralelas:

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, se forman ocho ángulos, de los cuales, algunos son congruentes (poseen igual medida).

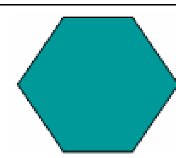
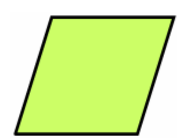
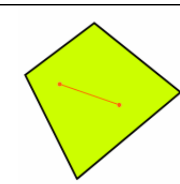
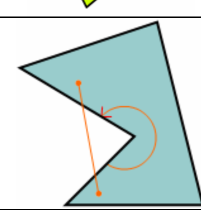


$$\alpha = w + y$$

$$\beta = x + z$$



- Clasificación de Polígonos:

Polígono Regular: Son aquellos polígonos que tienen **todos sus lados y ángulos interiores iguales**	
Polígono Irregular: Son aquellos que **NO** son regulares, es decir, **no cumplen una o ambas condiciones** de los polígonos regulares.	
Polígono Convexo: Son aquellos polígonos que poseen **todos sus ángulos interiores menores a 180°.**	
Polígono Cóncavo Son aquellos polígonos **que poseen, al menos, un ángulo interior que mide más de 180°.**	

- Generalidades en un Polígono cualquiera: (n = número de lados)

Diagonales desde un vértice:

$$d = n - 3$$

Diagonales totales:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Suma ángulos interiores:

$$S_i = 180^{o}(n-2)$$

Suma ángulos exteriores:

$$S_e = 360^{o}$$

- Polígono Regular:

Cada ángulo interior x de n lados

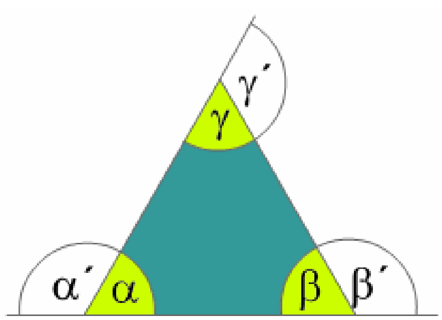
$$x = \frac{180^{o}(n-2)}{n}$$

Cada ángulo exterior y de n lados

$$y = \frac{360^{o}}{n}$$

Triángulos: (polígono de 3 lados)

Elementos Primarios:



$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^{\circ}$$ Ángulos exteriores

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$$ Ángulos interiores

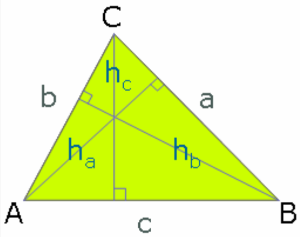
TEOREMA:
Cada ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores **NO** adyacentes a él.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Generalidades del triángulo:



$$Área = \frac{Base \cdot Altura}{2}$$

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Perimetro

$$P = a + b + c$$

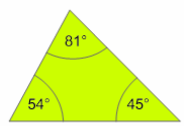
Clasificación de los triángulos:

Según sus ángulos

-Acutángulo:

Es aquel que tiene todos sus ángulos interiores agudos (menores a 90º).

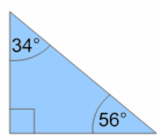
Ej.:



-Rectángulo:

Es aquel que tiene un ángulo recto (90º).

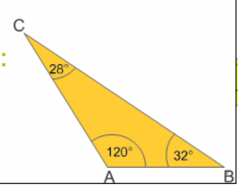
Ej.:



-Obtusángulo:

Es aquel que tiene un ángulo obtuso (mayor que 90º y menor que 180º).

Ej.:

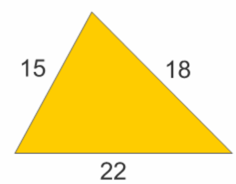


Según sus lados

-Escaleno:

Es aquel que tiene todos sus lados distintos, a≠ b≠ c.

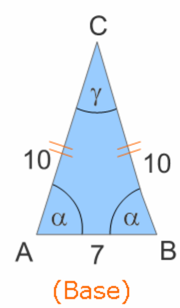
Ejemplo:



-Isósceles:

Es aquel que tiene 2 lados iguales y una base.

Ejemplo:

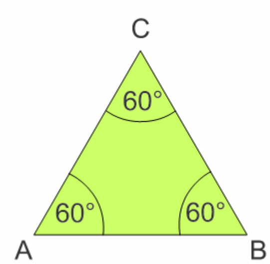


$\angle CBA = \angle BAC = \alpha$

Se dice que el triángulo de la figura, es "isósceles de base AB", o bien, "isósceles en C".

-Equilátero:

Es aquel que tiene todos sus lados iguales.

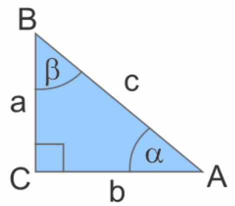


Ejemplo:

En la figura, el triángulo ABC es equilátero: AB = BC = AC.
Sus ángulos interiores también son iguales.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

Teorema de Pitágoras:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

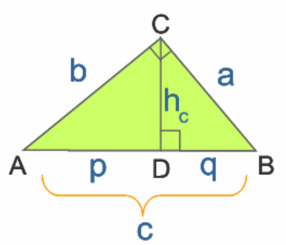
Teorema de Euclides:

$$h_c^2 = p \cdot q$$

$$a^2 = c \cdot q$$

$$b^2 = c \cdot p$$

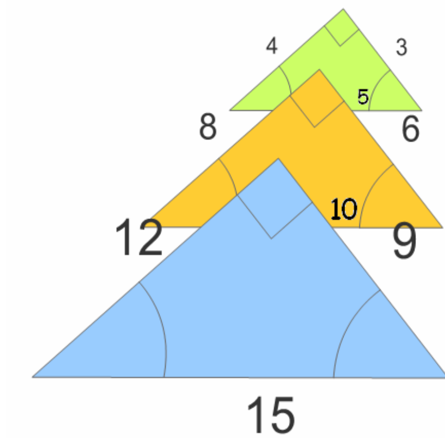
$$h_c = \frac{a \cdot b}{c}$$



Tríos Pitagóricos:

3-4-5 y sus múltiplos

5-12-13 y sus múltiplos

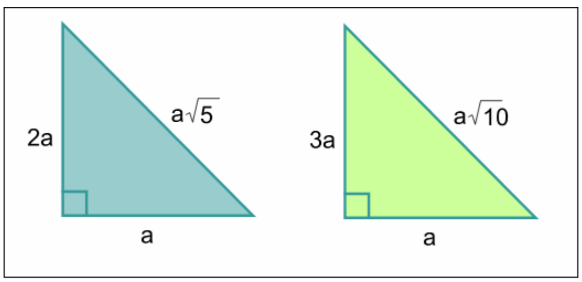


$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

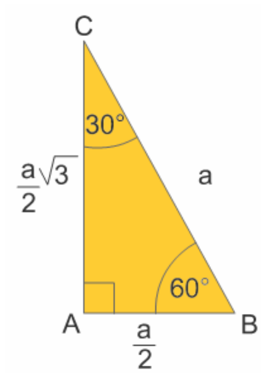
$$6^2 + 8^2 = (10)^2$$

$$9^2 + 12^2 = (15)^2$$

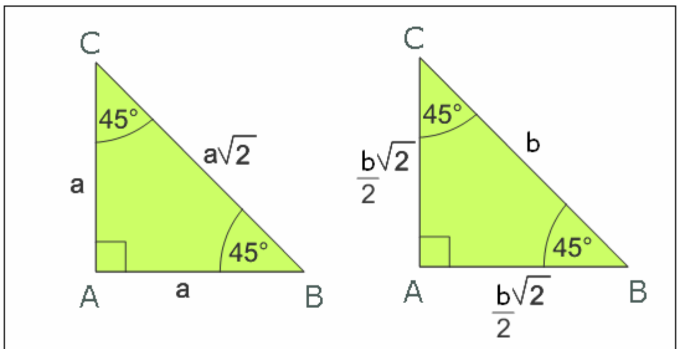
Relaciones métricas:



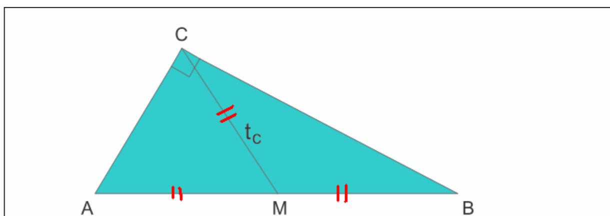
Triángulos 30°, 60° y 90°:



Triángulos rectángulos Isósceles:



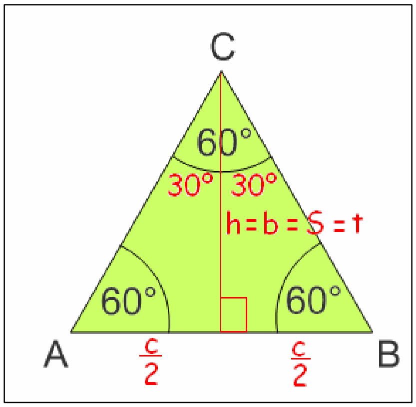
Triángulo rectángulo y transversal de gravedad:



Si M es punto medio de $\overline{AB}$, entonces: AM = MB = CM

TRIÁNGULO EQUILÁTERO:

Las alturas, bisectrices, simetrales y Transversales de Gravedad son iguales



Área – Altura y Perímetro

Área

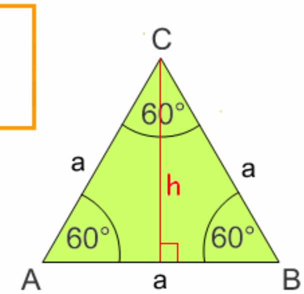
$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Altura

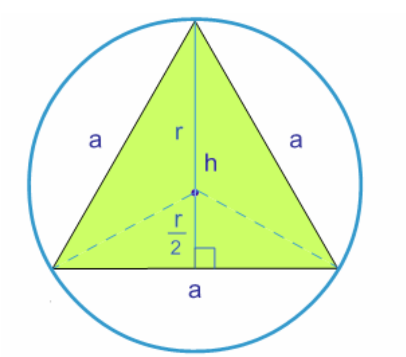
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Perímetro

$$P = 3a$$



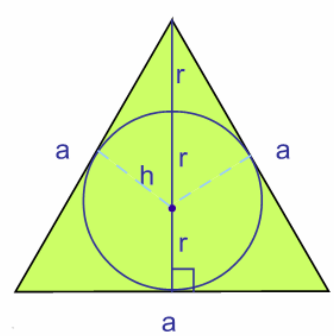
Relación Altura del Triángulo y el radio de la circunferencia Circunscrita



$$h = r + \frac{r}{2} \Rightarrow h = \frac{3r}{2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Relación Altura del Triángulo y el radio de la circunferencia Inscrita



$$h = 3r$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

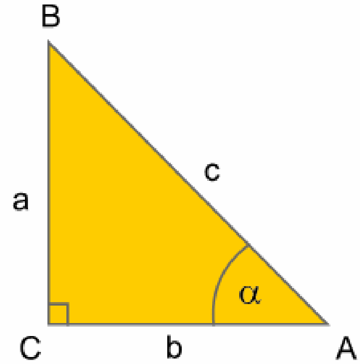
Trigonometría:

Funciones trigonométricas:

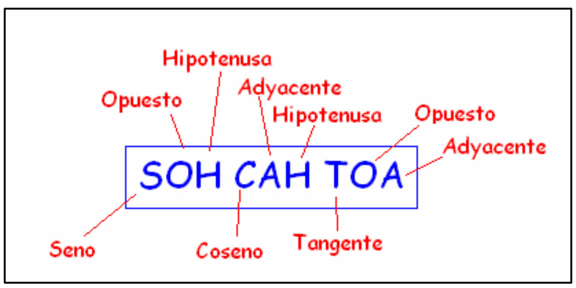
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$



Recordatorio:



Se dice

COCA COCA HIP HIP

en este orden

seno coseno Tangente

$\frac{CO}{HIP} \quad \frac{CA}{HIP} \quad \frac{CO}{CA}$

Funciones Inversas:

La COSECANTE es la inversa del SENO

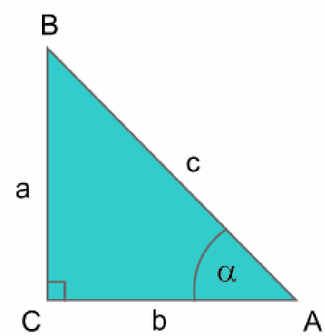
$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{Sen } \alpha} = \frac{c}{a}$$

La COTANGENTE es la inversa de la TANGENTE

$$\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{b}{a}$$

La SECANTE es la inversa del COSENO

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$



Identidades Trigonométricas:

1. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
2. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
5. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Si α y β son complementarios :

$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$

$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)}$

Algunos valores de funciones trigonométricas de ángulos conocidos:

En la fila del SENO se enumera del 0 al 1, luego se aplica raiz cuadrada a cada número, y luego, de divide por dos.
Para el COSENO, se hace lo mismo, pero invertido

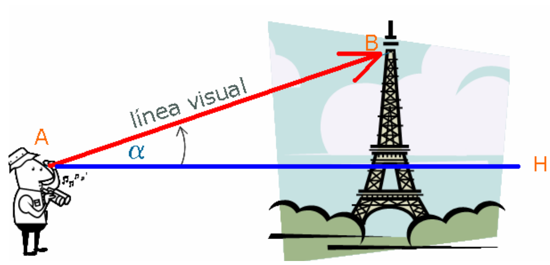
	0°	30°	45°	60°	90°
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

$\Rightarrow$

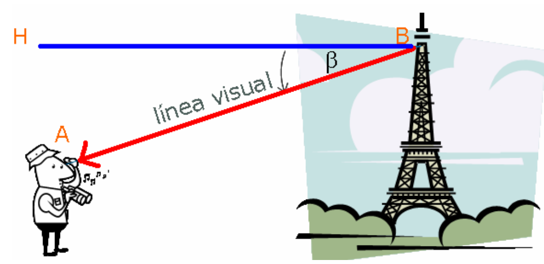
Luego se calcula

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} = \frac{\operatorname{sen}}{\cos}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	indeter

Ángulo de Elevación:



Ángulo de Depresión:

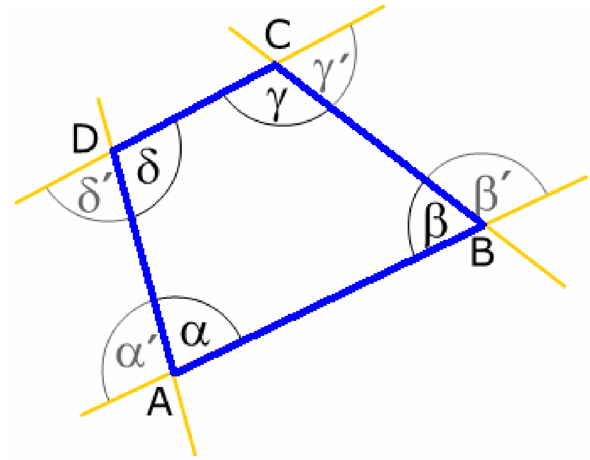


Cuadriláteros: (polígono de 4 lados)

Elementos:

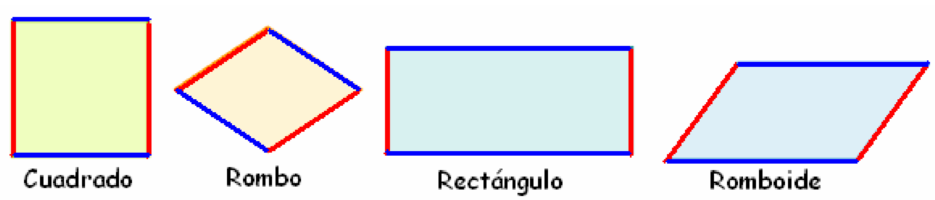
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$: ángulos interiores.
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

$\alpha', \beta', \gamma', \delta'$: ángulos exteriores.
$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°$

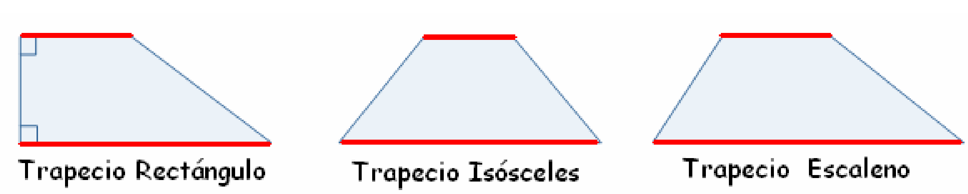


Clasificación de Cuadriláteros según su paralelismo:

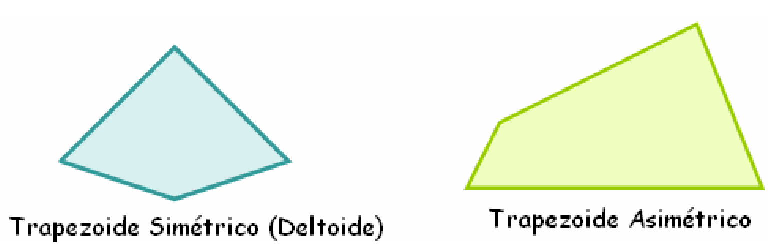
- Paralelógramos: Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos



- Trapecios: Cuadrilátero con un par de lados paralelos



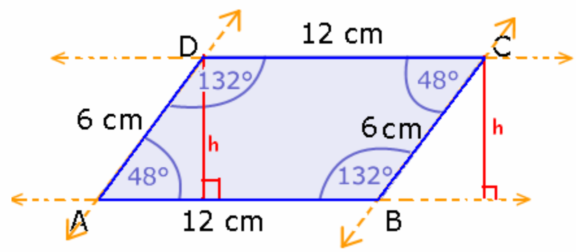
- Trapezoides: Cuadrilátero que NO tienen lados paralelos



PARALELÓGRAMOS:

Características generales

- Ángulos opuestos iguales y ángulos consecutivos suplementarios.
- Lados opuestos iguales
- Lados opuestos paralelos
- Las diagonales se dimidian
- Área = base · altura



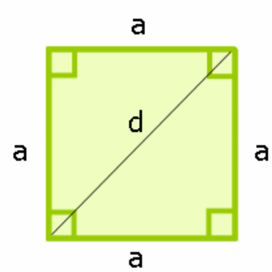
ABCD, romboide.

AB = DC y AD = BC

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

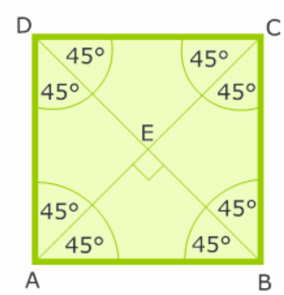
Cuadrado

- 4 lados iguales
- 4 ángulos interiores iguales a 90º
- diagonal = lado · $\sqrt{2}$ $\boxed{d = a\sqrt{2}}$
- Perímetro = 4a
- Área = $(\text{lado})^2$ $\boxed{\text{Área} = a^2}$
- Área = $\dfrac{(\text{diagonal})^2}{2}$ $\boxed{\text{Área} = \dfrac{d^2}{2}}$



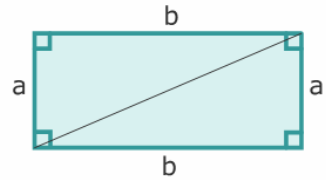
Propiedades de las diagonales:

- Son iguales: AC = BD
- Son perpendiculares: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
- Se dimidian: AE = EC = DE = EB
- Son bisectrices



Rectángulo

- 2 pares de lados iguales
- 4 ángulos interiores iguales a 90°
- Área = largo · ancho



$\boxed{A = a \cdot b}$

- Perímetro = suma de sus 4 lados

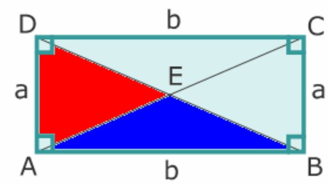
$\boxed{P = 2(a + b)}$

- diagonal(d) = $\sqrt{(\text{largo})^2 + (\text{ancho})^2}$ *(Por teorema de Pitágoras)*

$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Propiedades de las diagonales:

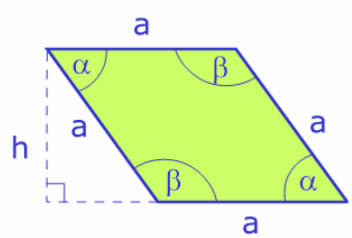
- Son iguales: AC = BD
- Se dimidian: AE = EC = DE = EB



Área △AED = Área △ABE

Rombo

- 4 lados iguales
- ángulos opuestos iguales
- Perímetro = suma de sus 4 lados

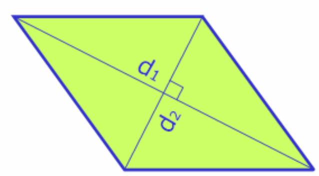


$\boxed{P = 4a}$

- Área = lado · altura

$\boxed{\text{Área} = a \cdot h}$

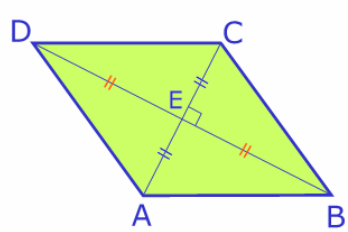
- Área = $\dfrac{\text{producto de diagonales}}{2}$



$\boxed{\text{Área} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}}$

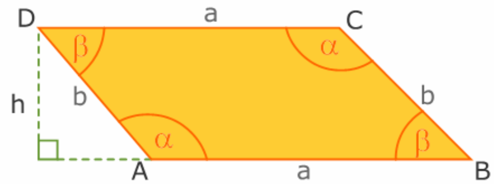
Propiedades de las diagonales

- Son perpendiculares: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
- Se dimidian: AE = EC y DE = EB
- Son bisectrices.



Romboide

- 2 pares de lados iguales
- Ángulos opuestos iguales



- Área = base · altura

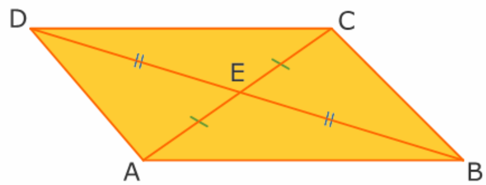
$$\boxed{\text{Área} = a \cdot h}$$

- Perímetro = suma de sus 4 lados

$$\boxed{P = 2a + 2b}$$

Propiedades de las diagonales

- Se dimidian: AE = EC y DE = EB

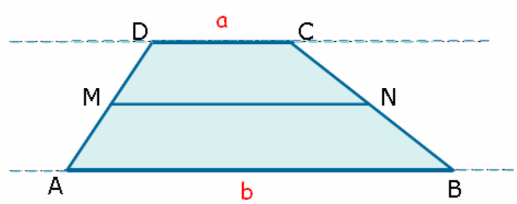


<u>TRAPECIOS</u>:

Características Generales

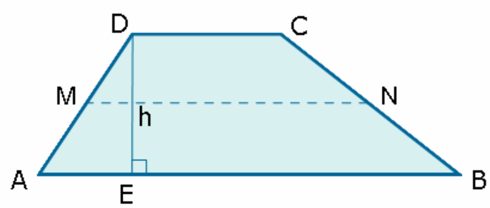
- Un par de lados paralelos, llamados bases ($\overline{AB}//\overline{DC}$)
- Mediana ($\overline{MN}$): Trazo que une los puntos medios de los lados **NO** paralelos.

$$\boxed{\overline{MN} = \frac{a + b}{2}}$$



$\overline{AB} // \overline{DC} // \overline{MN}$

- La mediana $\overline{MN}$, dimidia a la altura h.



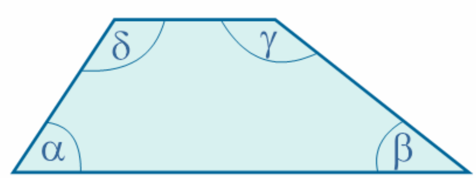
Altura = $\overline{DE}$ = h

- El área del trapecio corresponde a la semisuma de sus bases, por la altura:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot h}{2}}$$

$$\boxed{\text{Área} = \text{Mediana} \cdot \text{altura}}$$

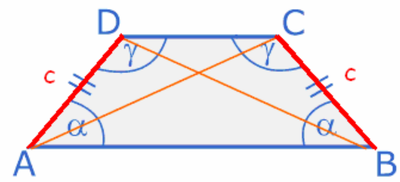
- Los ángulos consecutivos de los lados **NO** paralelos son suplementarios:



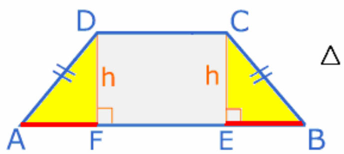
$$\alpha + \delta = 180°$$
$$\beta + \gamma = 180°$$

Trapecio isósceles

- $\overline{AB} // \overline{CD}$
- Ángulos basales iguales.
- Lados no paralelos iguales: AD = BC
- Diagonales iguales: AC = BD

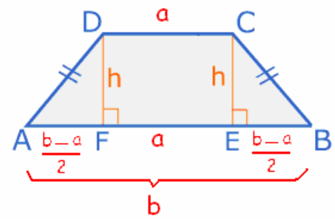


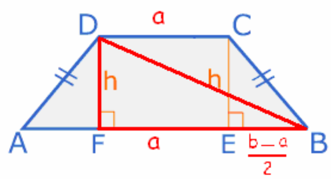
- Al trazar las alturas desde los vértices superiores, se forman en ambos extremos del trapecio dos triángulos rectángulos congruentes:



$\triangle AFD \cong \triangle BEC$

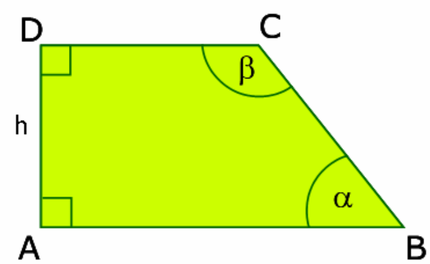
AF = EB





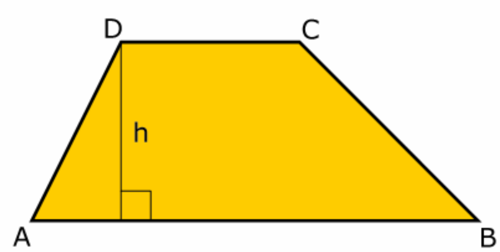
Trapecio Rectángulo

- $\overline{AB} // \overline{DC}$
- Tiene 2 ángulos rectos
- $\alpha + \beta = 180°$
- $\overline{DA}$: altura del trapecio (DA = CE = h)



Trapecio Escaleno

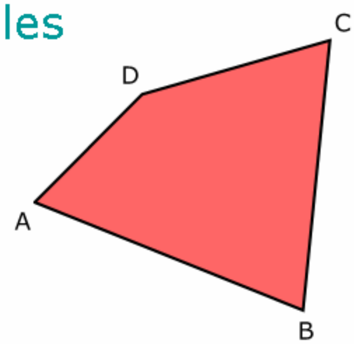
- $\overline{AB} // \overline{DC}$
- Todos sus lados son distintos



TRAPEZOIDES:

Características Generales

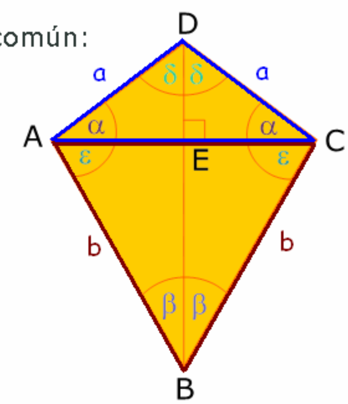
- No tienen lados paralelos.



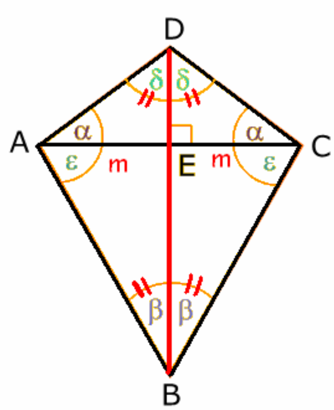
Trapezoide Simétrico (Deltoide)

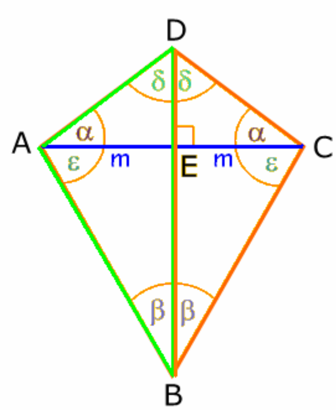
- Está formado por 2 triángulos isósceles con base común:
  $\triangle ADC$ y $\triangle ABC$, triángulos isósceles de base $\overline{AC}$
- Las diagonales son perpendiculares:
  $\overline{AC} \perp \overline{DB}$
- El área se puede calcular como:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{(\overline{AC} \cdot \overline{DB})}{2}}$$



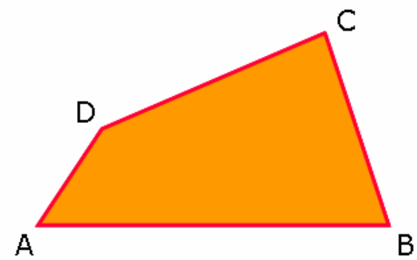
- La diagonal $\overline{DB}$ es bisectriz del ángulo ADC y del ángulo CBA.
- La diagonal $\overline{DB}$ dimidia a la diagonal $\overline{AC}$ (AE = EC)

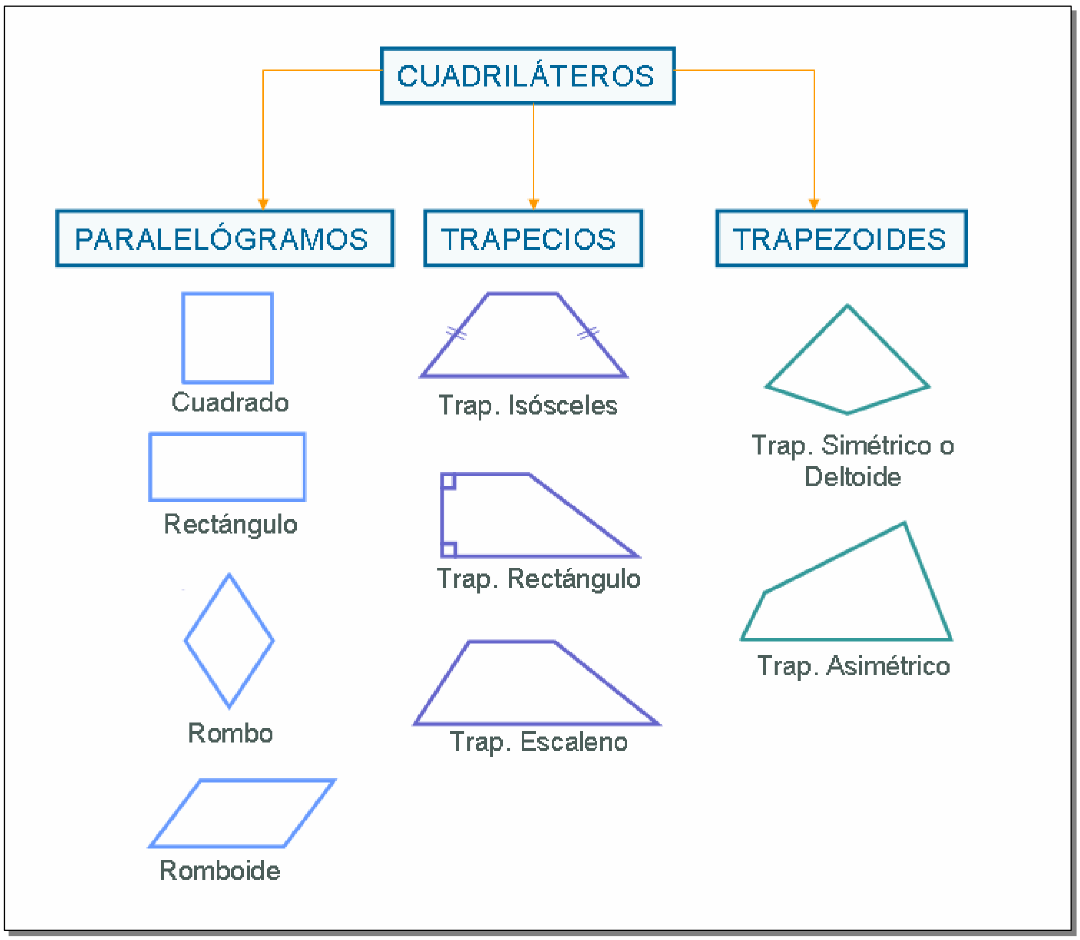




Trapezoide Asimétrico

- Lados distintos y ángulos interiores distintos.
- Para calcular su área, se descompone en figuras conocidas (triángulos, cuadrados, rectángulos, etc.)

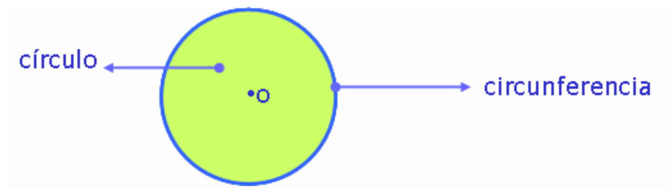




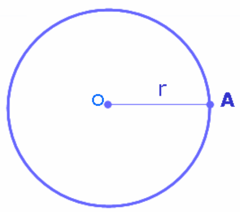
Circunferencia y Círculo:

Circunferencia:
Linea curva, cerrada y plana, cuyos puntos equidistan (igual distancia) de un punto fijo llamado centro

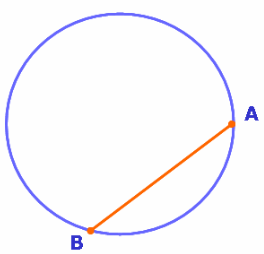
Círculo:
Región interior limitado por una circunferencia



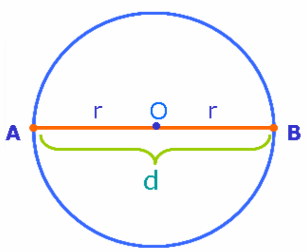
Elementos de la Circunferencia:



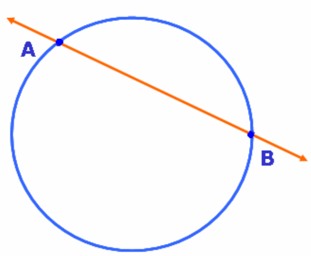
O: centro de la circunferencia
$\overline{OA}$: radio = r



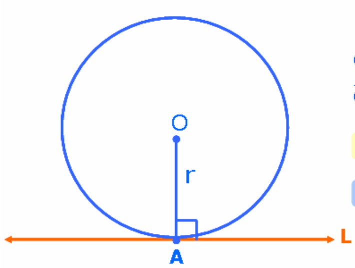
$\overline{AB}$: Cuerda



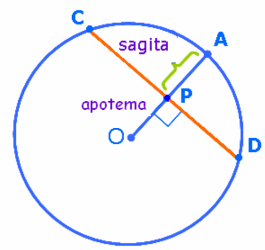
O: centro de la circunferencia
$\overline{AB}$: diámetro = **d** = **2r**



$\overline{AB}$: Cuerda
$\overleftrightarrow{AB}$: Secante

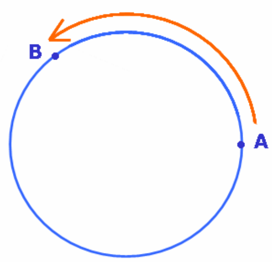


O: centro de la circunferencia
$\overline{OA}$: radio
A: Punto de tangencia
$\overline{OA} \perp L$

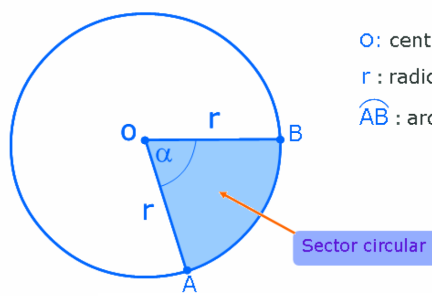


O: centro de la circunferencia
$\overline{OA}$: radio
$\overline{OP}$: apotema
$\overline{PA}$: sagita

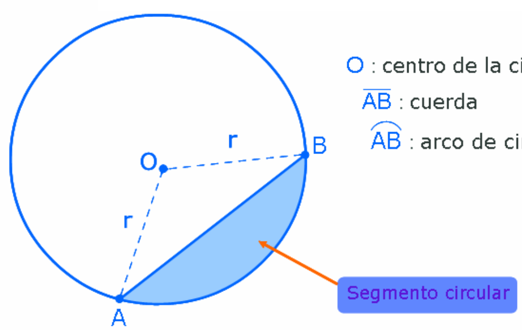
En la figura, el radio $\overline{OA}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{CD}$ en su punto medio **P**. CP=PD



$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia
Se lee sentido anti-horario



O: centro de la circunferencia
r : radio
$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia



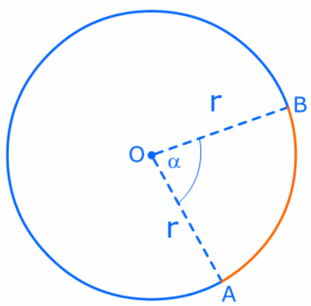
O : centro de la circunferencia
$\overline{AB}$: cuerda
$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia

Área del círculo y Perímetro de la Circunferencia:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

$$\text{Perímetro} = 2\pi \cdot r$$ o $$\text{Perímetro} = \pi \cdot d$$

Medida de un Arco de Circunferencia



$\overset{\frown}{AB}$:arco de circunferencia

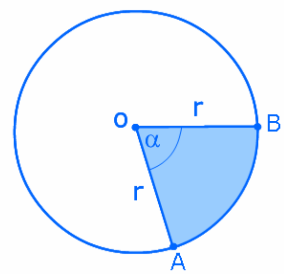
O:centro de la circunferencia

r :radio

$$\text{Arco} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$\overset{\frown}{AB} = \alpha$$

Área de un Sector Circular



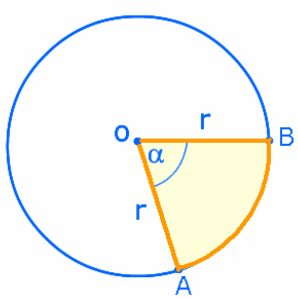
$$A_{\text{sector}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

O: centro de la circunferencia

r : radio

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia

Perímetro de un Sector Circular



$$P_{\text{sector}} = \overset{\frown}{AB} + 2r$$

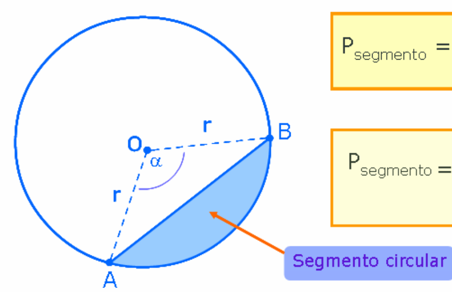
$$P_{\text{sector}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r + 2r$$

O: centro de la circunferencia

r : radio

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia

Perímetro de un Segmento Circular



$$P_{\text{segmento}} = \overset{\frown}{AB} + \overline{AB}$$

$$P_{\text{segmento}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r + \overline{AB}$$

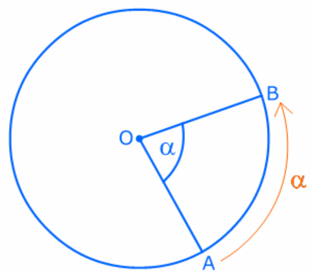
O : centro de la circunferencia

$\overline{AB}$: cuerda

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia

Teoremas Fundamentales (ángulos)

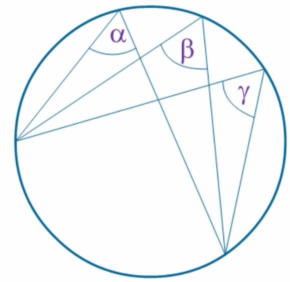
Ángulo del centro: Tiene el vértice en el centro de la circunferencia, y mide lo mismo que el arco que subtiende.



O: centro de la circunferencia

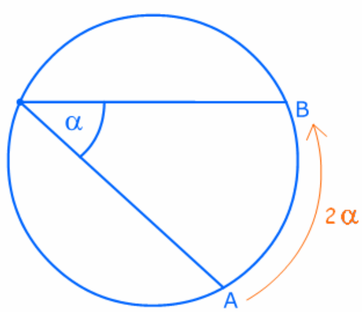
Igualdad de ángulos inscritos

Si dos o más ángulos inscritos subtienden el mismo arco, éstos son iguales.



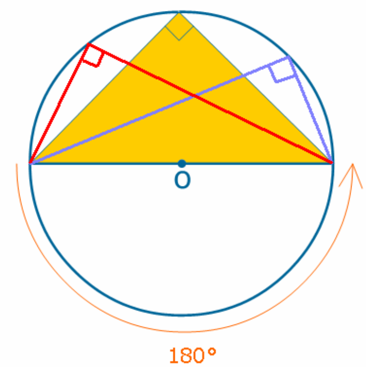
$$\alpha = \beta = \gamma$$

Ángulo inscrito: Tiene el vértice en la circunferencia, y mide la mitad del arco que subtiende.



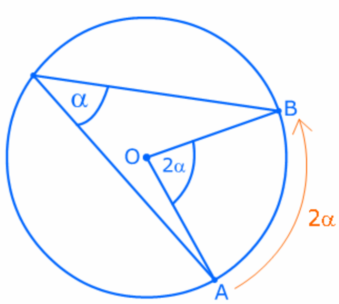
Triángulo inscrito en una semicircunferencia

Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo con hipotenusa igual al diámetro.

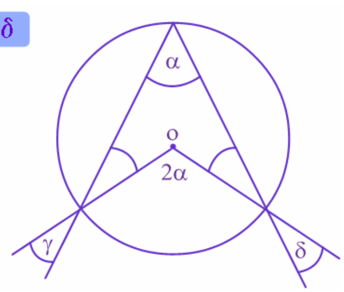


O: centro de la circunferencia

Corolario:
Si un ángulo inscrito y un ángulo del centro subtienden el mismo arco, entonces el ángulo del centro es el doble del ángulo inscrito.

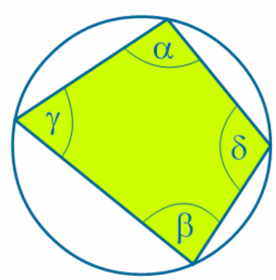


$\boxed{\alpha = \gamma + \delta}$



Cuadrilátero inscrito en una circunferencia

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.

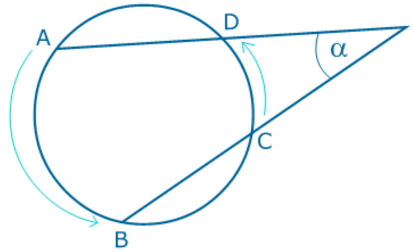


$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

Teorema del ángulo exterior

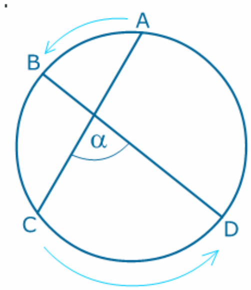
Si α es ángulo exterior de la circunferencia, entonces:



$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

Teorema del ángulo interior

Si α es ángulo interior de la circunferencia, entonces:

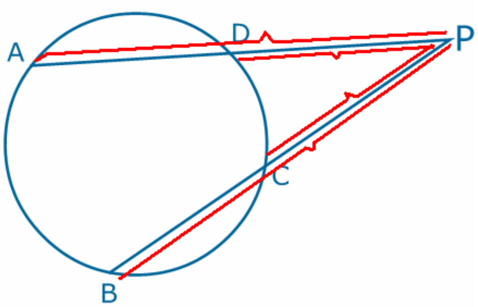


$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

Teoremas Fundamentales (Trazos)

Teorema de las secantes

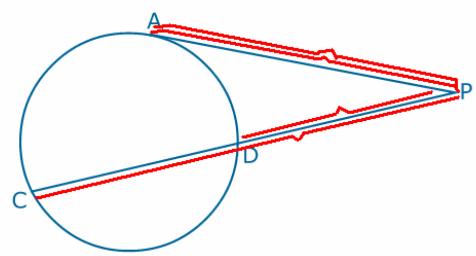
Sean $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ dos secantes, entonces:



$$\overline{PA} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$$

Teorema de la tangente y secante

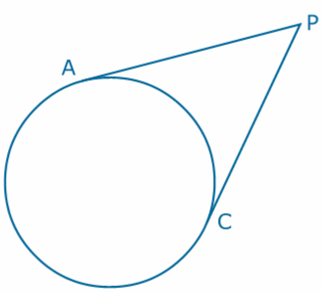
Sean $\overline{PA}$ una tangente y $\overline{PC}$ una secante, entonces:



$$(\overline{PA})^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Teorema de las tangentes

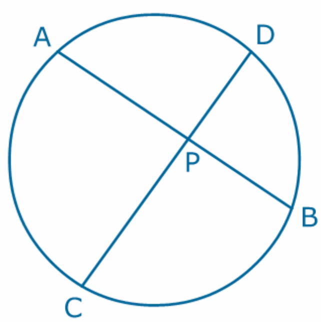
Sean $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$ dos tangentes, entonces:



$$PA = PC$$

Teorema de las cuerdas

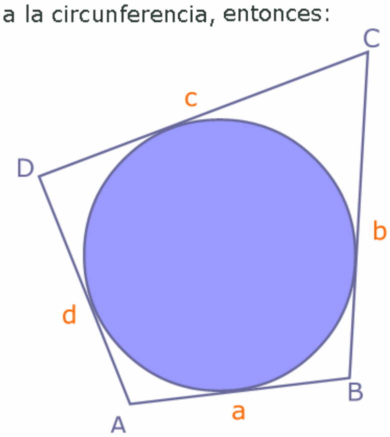
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas, entonces:



$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$

Cuadrilátero circunscrito

Sea ABCD cuadrilátero circunscrito a la circunferencia, entonces:



$$a + c = b + d$$

Geometría de Proporción:

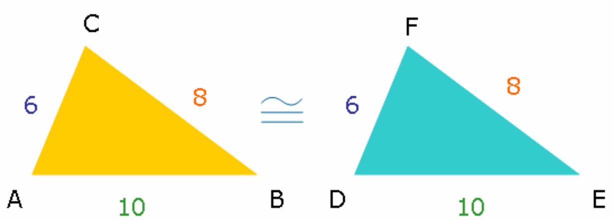
Congruencia ≅

Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma, el mismo tamaño y la misma área, es decir, si al colocarlas una sobre la otra son coincidentes en toda su extensión.

Triángulos congruentes

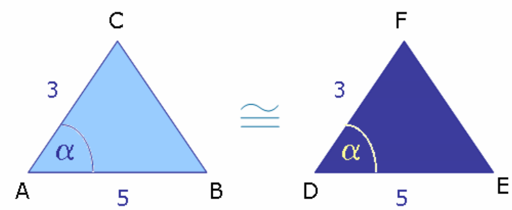
Hay 3 criterios de congruencia:

1° Lado, lado, lado (**L.L.L.**)



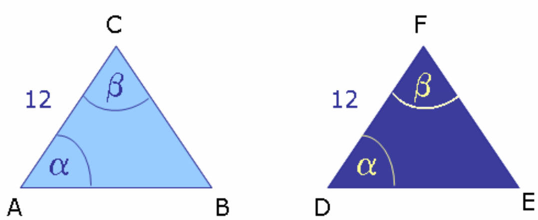
Los triángulos ABC y DEF son congruentes y se denota:
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (en ese orden)

2° Lado, ángulo, lado (**L.A.L.**)



Los triángulos ABC y DEF son congruentes y se denota:
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

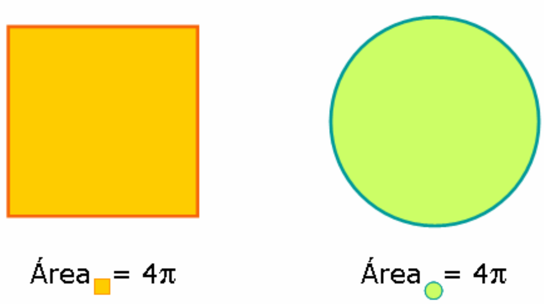
3° ángulo, lado, ángulo (**A.L.A**)



Los triángulos ABC y DEF son congruentes y se denota:
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Figuras Equivalentes

Son aquellas que tienen la misma área.



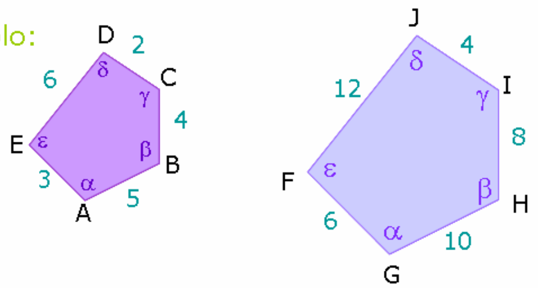
Semejanza ~

Para que dos polígonos sean semejantes es necesario que se cumplan dos condiciones:

1° que tengan sus ángulos respectivamente iguales, y

2° que sus lados homólogos sean proporcionales.

Ejemplo:



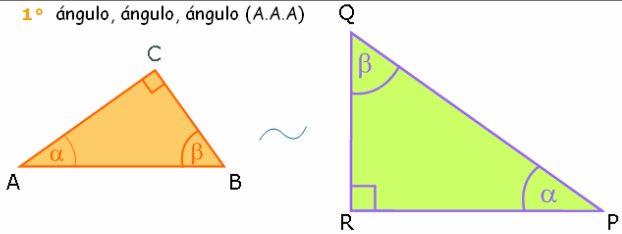
están en razón 1:2.

Se llaman "lados homólogos" a los lados que unen dos vértices con ángulos congruentes.

Triángulos Semejantes ~

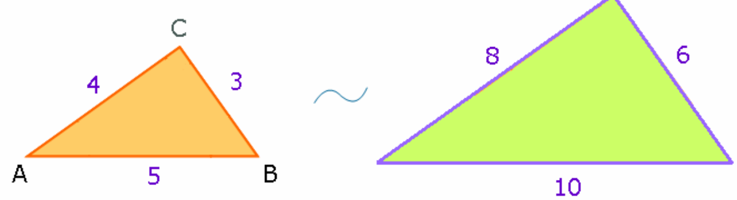
Hay 3 criterios de semejanza:

1° ángulo, ángulo, ángulo (A.A.A)



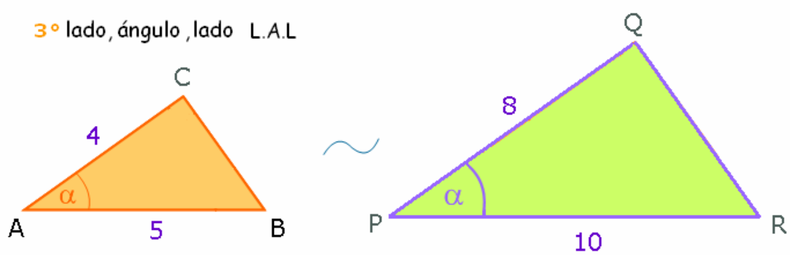
Δ ABC ~ Δ PRQ el orden es fundamental.

2° lado, lado, lado (proporcionales) L.L.L



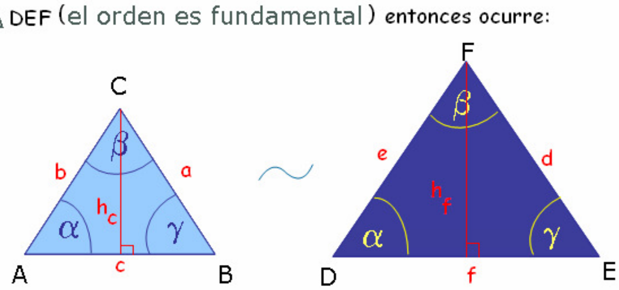
Δ ABC ~ Δ PRQ el orden es fundamental.

3° lado, ángulo, lado L.A.L



Δ ABC ~ Δ PRQ el orden es fundamental.

Si Δ ABC ~ Δ DEF (el orden es fundamental) entonces ocurre:



$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k \Rightarrow \frac{h_c}{h_f} = \dots = k \Rightarrow \frac{\text{Perimetro } \Delta ABC}{\text{Perimetro } \Delta DEF} = k \Rightarrow \frac{\text{Área } \Delta ABC}{\text{Área } \Delta DEF} = k^2$$

lados homólogos proporcionales

Elementos homólogos proporcionales

División de un segmento

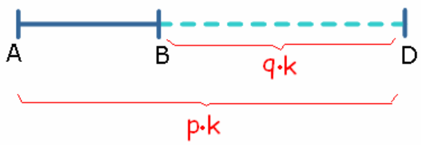
División interior

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{m}{n}$$

segmento **AB**

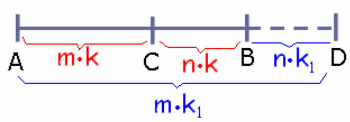
División exterior

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{p}{q}$$



División armónica

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{m}{n}$$



Sección Áurea o Divina

El punto **X** divide el trazo **AB** en "sección áurea", si el trazo mayor es media proporcional geométrica entre el trazo completo y el menor.

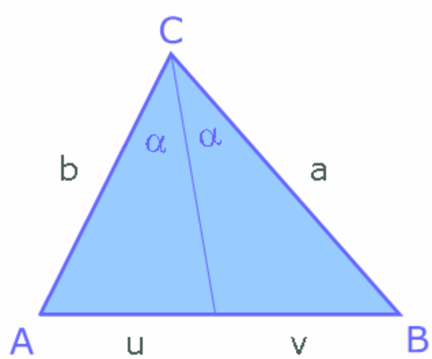
Si AX > BX, entonces: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$ ó $(\overline{AX})^2 = \overline{AB}\cdot\overline{BX}$

El segmento AX se llama Sección Áurea, ya que al dividirlo por XB, se obtiene

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618... = \Omega \text{ (número de oro)}$$

Teorema de Apolonio

En el triángulo de la figura, $\overline{CD}$ es bisectriz, entonces se cumple la siguiente proporción:



$$\boxed{\frac{b}{u} = \frac{a}{v}}$$

Este teorema es válido para cualquier triángulo.

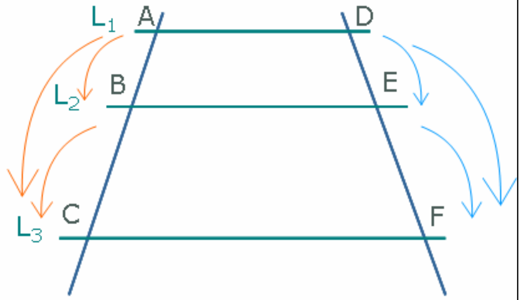
Teorema de Thales

Sean $L_1 // L_2 // L_3$, entonces:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

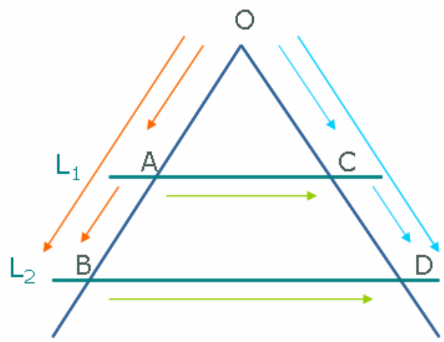


Sean $L_1 // L_2$, entonces:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

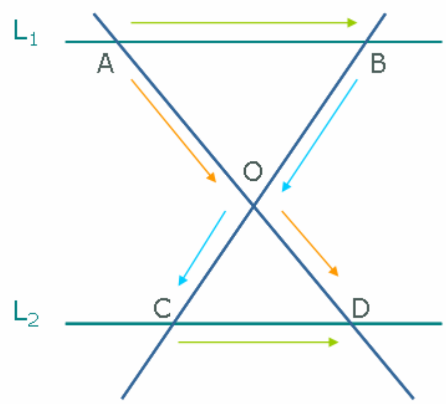


Sean $L_1 // L_2$, entonces:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BO}{OC}$$



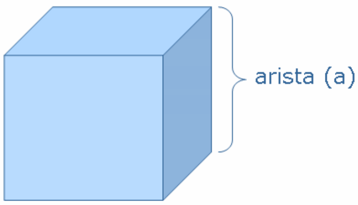
Cuerpos Geométricos:

Poliedros

Cuerpo tridimensional delimitado por **caras** poligonales planas.

Cubo o Hexaedro

Poliedro formado por 6 caras cuadradas.



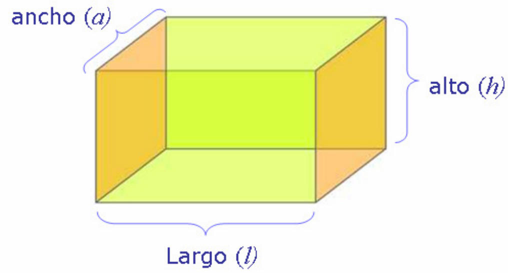
Área $= 6a^2$

Volumen $= a^3$

	Cubo o Hexaedro
Nº de caras	6
Nº de vértices	8
Nº de aristas	12

Paralelepípedo

Poliedro formado por 6 caras rectangulares.



Área $= 2(a \cdot l + a \cdot h + l \cdot h)$

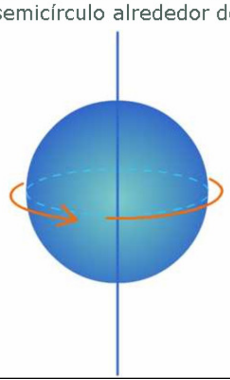
Volumen $= l \cdot a \cdot h$

Cuerpos redondos

Son aquellos cuerpos o sólidos geométricos formados por regiones curvas, o regiones planas y curvas.

Esfera

Corresponde al cuerpo generado por la rotación de 360º de un semicírculo alrededor de su diámetro.

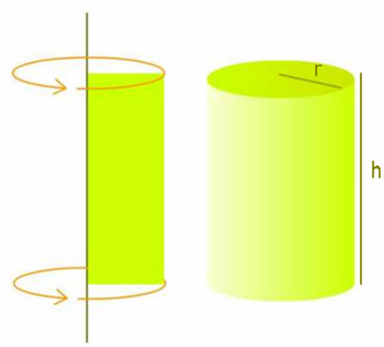


Área $= 4\pi r^2$ *(r : radio)*

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Cilindro

Corresponde al cuerpo generado por la rotación de 360º de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

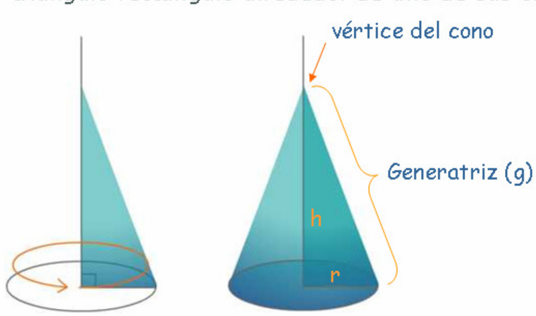


Área $= 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

Volumen $= \pi r^2 \cdot h$

Cono

Corresponde al cuerpo generado por la rotación de 360º de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



Área $= \pi \cdot r \cdot g + \pi r^2$

Volumen $= \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

Geometría Analítica del Plano y del Espacio:

Distancia entre dos puntos

La *"distancia"* entre dos puntos del plano

$P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto Medio

El *"punto medio"* entre dos puntos del plano

$P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ecuación de la recta

Ecuación General de la recta

Es de la forma: $ax + by + c = 0$, con a, b y c reales.

Ecuación Principal de la recta

Es de la forma: $\boxed{y = mx + n}$

m : pendiente

n : coeficiente de posición

El coeficiente de posición (n), es el punto donde la recta intersecta al eje Y.

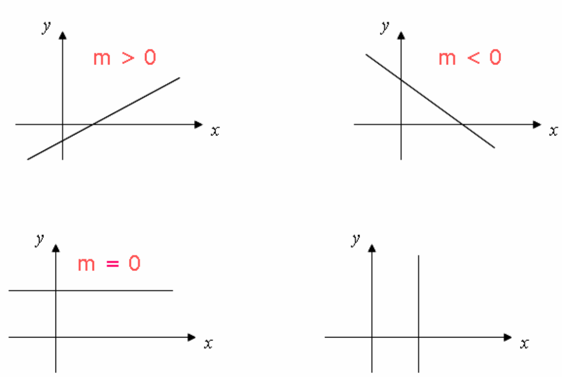
Pendiente de la recta

La pendiente de la recta que pasa por los puntos:

$P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Tipos de pendiente



Ecuación de la recta

- dado un punto de ella y la pendiente

La Ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1 (x_1, y_1)$ y tiene pendiente "m",

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

- dados dos puntos

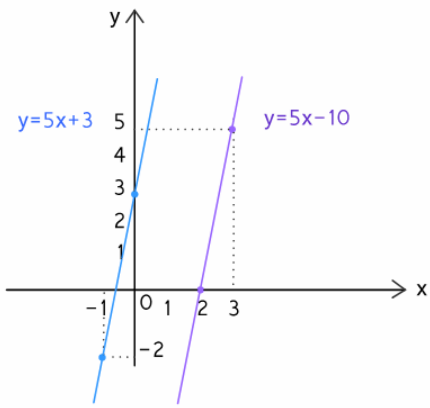
La Ecuación de la recta que pasa por los puntos: $P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Rectas paralelas

Se dice que dos rectas, L_1 y L_2 son paralelas si tienen igual pendiente.

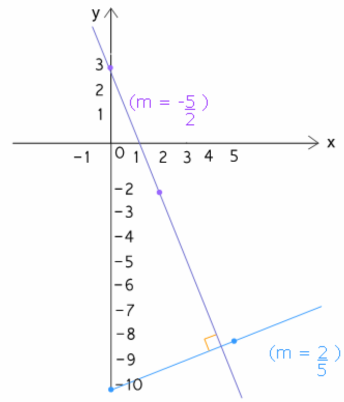
$$L_1: y = 5x + 3 \quad y \quad L_2: y = 5x - 10$$



Rectas perpendiculares

Se dice que dos rectas, L_1 y L_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a **-1**.

$$L_1: y = -\frac{5}{2}x + 3 \quad y \quad L_2: y = \frac{2}{5}x - 10$$



Rectas coincidentes

Se dice que dos rectas, L_1 y L_2 son coincidentes si tienen la misma pendiente y el mismo coeficiente de posición.

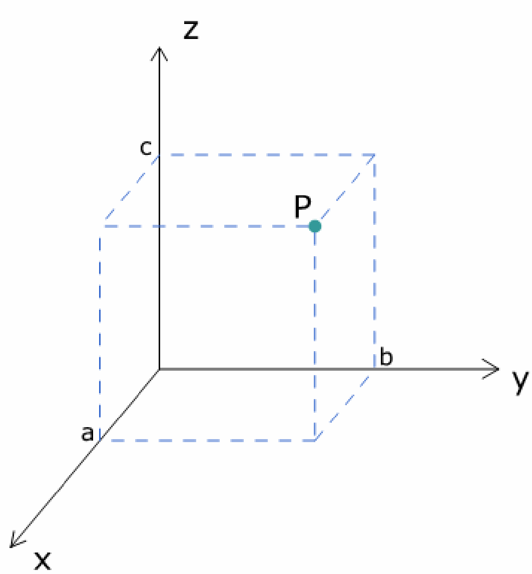
$$L_1: y = \frac{5}{3}x + 4 \quad y \quad L_2: y = \frac{5}{3}x + 4$$

Si las rectas son coincidentes, NO son paralelas.

Geometría en el espacio

Coordenadas cartesianas en el espacio

Sistema Tridimensional



P (a, b, c)

a: abscisa

b: ordenada

c: cota

Transformaciones Isométricas:

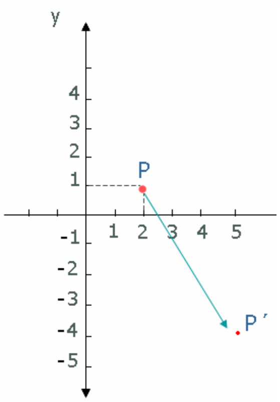
1) No se altera la forma ni el tamaño de la figura.
2) Sólo cambia la posición (orientación o sentido de ésta).

Traslación

vector traslacion

$$P(x, y) \xrightarrow{T(a,\ b)} P'(x + a,\ y + b)$$

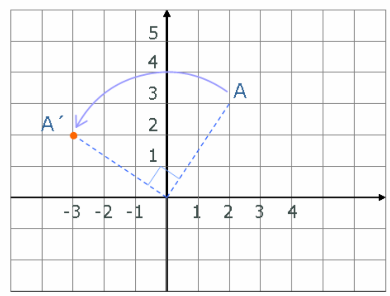
$$P(2, 1) \xrightarrow{T(3,\ -5)} P'(5, -4)$$



Rotación

Ángulo / Punto	90°	180°	270°	360°
A(x,y)	(-y,x)	(-x,-y)	(y,-x)	(x,y)

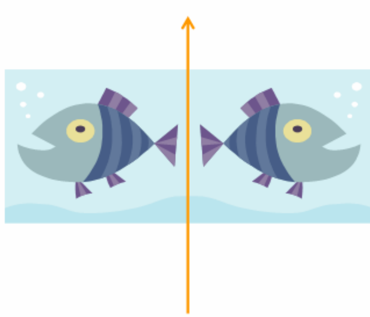
La rotación es positiva si es en sentido contrario a los punteros del reloj.



Si el punto A (2,3) gira con respecto al origen en 90°, se transforma en el punto A´(-3,2).

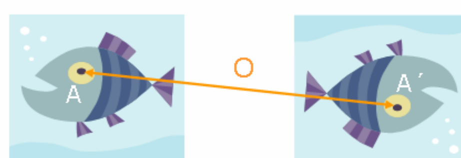
Simetría o Reflexión

Simetría Axial: Reflexión respecto de un eje.



Eje de Simetría

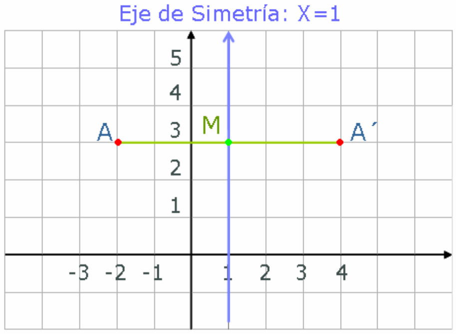
Simetría Central: Reflexión respecto de un punto.



O : centro de rotación

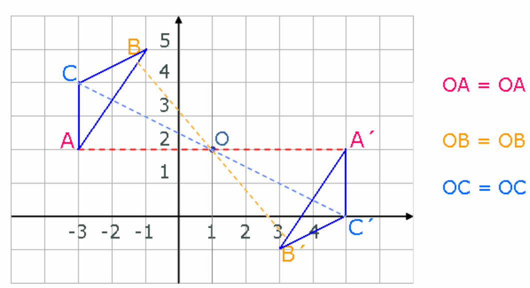
AO = OA´

Eje de Simetría: X=1



$\overline{AA}$´ es perpendicular al eje de simetría

AM = MA´



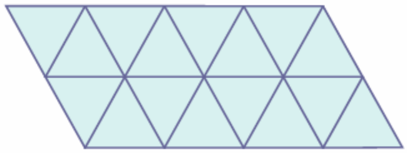
La simetría central equivale a una rotación de 180° con respecto a un punto.

Teselaciones

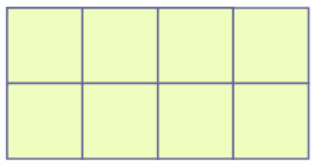
Una teselación es una regularidad o patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana, de manera que no queden espacios y no se superpongan las figuras.

Los tres polígonos regulares que recubren el plano son:

Triángulo equilátero



Cuadrado



Hexágono regular